ECOLE NATIONALE DES INGENIEURS DES TRAVAUX RURAUX ET DES TECHNIQUES SANITAIRES
STRASBOURG

CONCOURS D'ENTRÉE 1987

ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES APPLIQUÉES

COMMUNE AUX DEUX OPTIONS **DURÉE : 1 HEURE**

On note $\mathbb{R}_k[X]$ l'ensemble des polynômes à coefficients réels dont le degré n'excède pas k.

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension n et $\mathcal{L}(E)$ l'ensemble des endomorphismes de E.

Pour $f \in \mathcal{L}(E)$ et $P \in \mathbb{R}_k[X]$, $P = \sum_{i=0}^{k} a_i X^i$, on note $P(f) = \sum_{i=0}^{k} a_i f^i$ (où $f^0 = Id_E$).

I

1. Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ vérifiant : $\exists\, x_0 \in E, \left(x_0, f(x_0), \ldots, f^{n-1}(x_0)\right)$ est une base de E.

   a. Soit $g \in \mathcal{L}(E)$ tel que $g \circ f = f \circ g$.

      α. Montrer que $\forall\, m \in \mathbb{N}$ $f^m \circ g = g \circ f^m$.

      β. Prouver que : $\exists \left(b_0, \ldots, b_{n-1}\right) \in \mathbb{R}^n$, $g(x_0) = \sum_{i=0}^{n-1} b_i f^i(x_0)$.

      En déduire que : $g = \sum_{i=0}^{n-1} b_i f^i$.

   b. Montrer que $g \in \mathcal{L}(E)$ commute avec f si et seulement si : $\exists\, P \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$, $g = P(f)$.

2. Soit $f \in \mathcal{L}(E)$, admettant n valeurs propres distinctes $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ et soit e_i un vecteur propre associé à λ_i, pour $i = 1, \ldots, n$.

   a. On pose $x_0 = e_1 + \ldots + e_n$

      Montrer que $\left(x_0, f(x_0), \ldots, f^{n-1}(x_0)\right)$ est une base de E.

   b. Soit $g \in \mathcal{L}(E)$ tel que $g \circ f = f \circ g$.
      Montrer que g est diagonalisable, que les valeurs propres de g sont les images des valeurs propres de f par un élément P de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$ et que $g = P(f)$.

II

On suppose dorénavant que $E = \mathbb{R}_5[X]$.

On pose $A = (2X + 1)(X^2 - 1)(X^2 - 4)$ et $B = 20X^5 - 4X^4 - 225X^3 + 45X^2 + 405X - 81$

On considère $f : E \longrightarrow E$ définie par : f(P) est le reste de la division euclidienne de BP par A.

1. Montrer que $f \in \mathcal{L}(E)$ et déterminer M, matrice de f dans la base

   $\mathcal{B} = (1, X, X^2, X^3, X^4, X^5)$. (On développera A pour faire la division euclidienne donnant f(1) et on utilisera Xf(1) pour calculer f(X) ...). Présenter clairement les calculs.

2. Déterminer les valeurs et vecteurs propres de f. (On remarquera que les valeurs $B(-\frac{1}{2})$, B(1), B(- 1), B(2) et B(- 2) sont distinctes et on écrira l'équation polynômiale vérifiée par un vecteur propre de f).
   Indiquer les composantes dans $\mathcal{B}$ d'une base $(P_1, P_2, P_3, P_4, P_5, P_6)$ de vecteurs propres de f.

3. Soit $g \in \mathcal{L}(E)$, de matrice N dans $\mathcal{B}$ avec,

$$N = \begin{bmatrix} 16 & -8 & 4 & -2 & 1 & -0,5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -20 & 10 & -5 & 2,5 & -1,25 & 0,625 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & -2 & 1 & -0,5 & 0,25 & -0,125 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

   Montrer que : $\exists\, P \in \mathbb{R}_5[X]$ tel que $g = P(f)$, et déterminer P. (On pourra calculer $g(P_i)$ pour $i = 1, \ldots, 6$).

4. Soit $h \in \mathcal{L}(E)$ définie par :

   $h(X^i) = g(X^{5-i})$ pour $i = 0 \ldots, 5$ et g l'endomorphisme précédent.

   Existe-t-il $Q \in \mathbb{R}_5[X]$ tel que $h = Q(f)$?

   Si oui, déterminer Q.

• • •